

CLASSES DE CHERN EN COHOMOLOGIE RIGIDE

DENIS PETREQUIN

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Préliminaires et notations	2
2. Cas des variétés propres	3
2.1. Première classe de Chern	3
2.2. Les autres classes	8
3. Construction cristalline et comparaisons	10
3.1. Les topos m -cristallins	10
3.2. Classes de Chern m -cristallines	12
3.3. Le topos $(X/S)_{\text{cris}}^{\bullet}$	16
3.4. Interprétation cristalline de la cohomologie rigide	17
3.5. Construction des classes de Chern sur $(X/S)_{\text{cris}}^{\bullet}$	17
3.6. Comparaison avec les classes de Chern rigides	18
4. Cas des variétés ouvertes	23
4.1. Méthode générale - Les théorèmes de prolongements	23
4.2. La première classe	26
4.3. Cohomologie de l'espace projectif	31
4.4. Construction des c_i	32
4.5. Additivité des classes de Chern	33
4.6. Action du Frobenius	34
Références	34

INTRODUCTION

La cohomologie rigide, introduite par Berthelot [4] est une théorie cohomologique p -adique. C'est une généralisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer [17] et de la cohomologie cristalline [3]. Berthelot a démontré qu'elle vérifiait la propriété de finitude [9], la dualité de Poincaré et la formule de Künneth [8]. Dans cet article nous étudions les classes de Chern. Dans [21] nous nous intéresserons au cas des classes de cycles. Nous obtenons que la cohomologie rigide satisfait tous les axiomes des cohomologies de Weil.

Précisons les différentes parties de l'article.

Nous commencerons par un chapitre préliminaire, dans lequel on trouvera des rappels sur la définition de la cohomologie rigide ainsi que sur ses propriétés.

Dans le deuxième chapitre nous construisons les classes de Chern pour les variétés propres. Du fait de la définition même de la cohomologie rigide, cette construction s'apparente à une variante *rigide* des constructions de classes de Chern en cohomologie de De Rham. Cette méthode a l'avantage d'être élémentaire et explicite. Cependant, il semble difficile - ou au moins laborieux - de démontrer l'additivité de classes de Chern ainsi construites.

Dans le troisième chapitre, après avoir fait des rappels sur la cohomologie cristalline de niveau m , nous construisons des classes de Chern à valeur dans cette dernière en nous basant sur la construction des classes de Chern en cohomologie cristalline de Berthelot et Illusie [10]. Cela nous permet de réinterpréter la construction des classes de Chern rigides. Cette méthode a l'avantage de donner une construction plus intrinsèque ce qui nous permet d'utiliser les méthodes classiques (restriction à un cas universel) pour démontrer l'additivité des classes de Chern.

On donnera aussi des théorèmes de comparaison entre nos classes de Chern et les classes de Chern cristallines ou les classes de Chern à valeur dans le topos convergent d'Ogus [20] construites par Niziol [19].

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons aux variétés non nécessairement propres. Nous établissons quelques lemmes relatifs aux faisceaux localement libres et aux compactifications. L'outil principal est le théorème de platification par éclatement de Raynaud-Gruson [24]. Nous démontrons, par la suite, le théorème principal qui stipule que pour calculer la première classe de Chern d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur une variété X , il suffit de trouver un faisceau inversible $\overline{\mathcal{L}}$ sur un compactifié \overline{X} de X se restreignant à \mathcal{L} sur cette dernière et de prendre l'image de la première classe de Chern de $\overline{\mathcal{L}}$ par le morphisme de fonctorialité $H_{rig}^2(\overline{X}) \rightarrow H_{rig}^2(X)$. Nous montrons en effet (théorème 4.2.1) que la classe ainsi trouvée ne dépend pas des choix faits. Nous construisons ensuite les autres classes de Chern de manière classique à l'aide de fibrés projectifs.

Cet article est la première partie - légèrement modifiée - de ma thèse de doctorat [22]. Je tiens à remercier P. Berthelot pour tous les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de la rédaction de cet article.

1. PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

Tout au long de cet article, k désignera un corps de caractéristique $p > 0$. On appellera k -variété un schéma séparé de type fini sur $\text{Spec}(k)$. On se donne un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique \mathcal{V} de corps résiduel k . On note alors K son corps des fractions.

Rappelons pour commencer la construction de la cohomologie rigide [9]. Soit X une k -variété. Il existe d'après Nagata [18], une variété propre \overline{X} et une immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \overline{X}$. On suppose alors qu'il existe une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ dans un schéma formel \mathcal{Y} sur $\text{Spf}(\mathcal{V})$ lisse au voisinage de X - cette condition technique peut être supprimée en utilisant des résolutions de Čech, nous la garderons pour simplifier le propos.

On considère la fibre générique rigide \mathbf{Y} de \mathcal{Y} [23] et on note $sp : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ le morphisme de spécialisation. Rappelons [6, 1.1] que si on note \mathcal{Y}_0 la réduction de \mathcal{Y} sur k , on appelle, pour tout sous- k -schéma T de \mathcal{Y}_0 , *tube de T* et on note $]T[$ le sous-ensemble $sp^{-1}(T)$ des points de \mathbf{Y} qui se spécialisent dans T .

Avec les notations précédentes, on appelle voisinage strict [6, 1.2] de $]X[$ dans $]\overline{X}[$, tout ouvert V de $]\overline{X}[$ tel que le recouvrement $(V,]\overline{X} - X[)$ soit admissible. Dès lors, pour tout faisceau \mathcal{E} sur $]\overline{X}[$, on note

$$j^\dagger \mathcal{E} := \varinjlim_V \alpha_{V*} \alpha_V^* \mathcal{E},$$

où la limite inductive est prise sur tous les voisinages stricts de $]X[$ dans $]\overline{X}[$ et α_V désigne l'inclusion $V \hookrightarrow]\overline{X}[$.

On sait alors [6] que le complexe $\mathbb{R}sp_* j^\dagger \Omega_{]\overline{X}[}^*$ vu comme objet de la catégorie dérivée des complexes de K -vectoriels sur \overline{X} est indépendant à isomorphisme canonique près du choix de \mathcal{Y} . On posera donc :

$$\mathbb{R}\Gamma_{rig}((X, \overline{X})/K) := \mathbb{R}sp_* j^\dagger \Omega_{]\overline{X}[}^*.$$

Berthelot montre alors que les groupes de cohomologie

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{R}sp_* j^\dagger \Omega_{]\overline{X}[}^*)$$

ne dépendent pas de la compactification \overline{X} choisie.

On pose donc

$$H_{rig}^i(X/K) := H^i(\overline{X}, \mathbb{R}sp_* j^\dagger \Omega_{]\overline{X}[}^*).$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur la compactification nous noterons $\mathbb{R}\Gamma_{rig}(X/K)$ pour $\mathbb{R}sp_* j^\dagger \Omega_{]\overline{X}[}^*$.

2. CAS DES VARIÉTÉS PROPRES

On va se restreindre au cas des variétés propres. Nous allons construire la première classe de Chern d'un faisceau inversible à l'aide d'un calcul de cocycle.

REMARQUE : Pour une k -variété propre, la cohomologie rigide est isomorphe à la cohomologie du topos convergent d'Ogus [20]. Nos calculs ne sont donc qu'une réinterprétation de la construction des classes de Chern à valeurs dans le topos convergent [19, A] (proposition 3.6.6). Cependant ce calcul de cocycle sera nécessaire pour pouvoir étudier par la suite le cas des variétés ouvertes.

2.1. Première classe de Chern. Soient X une variété propre, \mathcal{F} un faisceau inversible sur X et une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{Y}$ dans un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{V})$ lisse au voisinage de X .

Lemme 2.1.1. *Il existe un recouvrement affine $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in \Lambda}$ de \mathcal{Y} tel que si on note \mathfrak{U}_X le recouvrement induit par \mathfrak{U} sur X , le faisceau \mathcal{F} soit trivialisé sur \mathfrak{U}_X .*

DÉMONSTRATION : Quitte à prendre un recouvrement affine de \mathcal{Y} on peut supposer que \mathcal{Y} et X sont affines. On pose alors $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathcal{A}/I$. On choisit un recouvrement $\mathfrak{U} = (X_i)_{i \in \Lambda}$ de X trivialisant \mathcal{F} . Quitte à raffiner le recouvrement, on peut supposer que pour tout $i \in \Lambda$, il existe $f_i \in A$ tel que $X_i = D(f_i)$. Pour tout $i \in \Lambda$, on choisit alors \tilde{f}_i un relèvement de f_i dans \mathcal{A} , les ouverts $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{A}_{\tilde{f}_i}})$ recouvrent alors l'image de X dans \mathcal{Y} . En rajoutant des ouverts de $\mathcal{Y} - X$, on obtient le recouvrement voulu. \square

On choisit donc un tel recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in \Lambda}$. Dès lors on considère $\mathfrak{U}_X = (X_i)_{i \in \Lambda}$ le recouvrement induit sur X . Pour tout $i \in I$, on notera $\mathcal{U}_i = \mathrm{Spf}(\mathcal{A}_i)$, $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ où $A_i = \mathcal{A}_i/I_i$. On se donne alors un cocycle $(u) \in Z^1(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$ représentant la classe du faisceau \mathcal{F} dans $H^1(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$.

Commençons par un lemme :

Lemme 2.1.2. *Soit $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ un \mathcal{V} -schéma formel affine. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un fermé de la fibre spéciale \mathcal{Y}_0 de \mathcal{Y}_0 . On note $]X[$ le tube de X dans la fibre générique rigide $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_K$. Pour tout $\tilde{u} \in \mathcal{A}$ relevant un élément inversible u de A , la restriction de u à $]X[$ est inversible.*

DÉMONSTRATION : On note v l'inverse de u dans A et on choisit \tilde{v} un relèvement de v dans \mathcal{A} . Dès lors, si on note I le noyau de l'application $\mathcal{A} \rightarrow A$, il existe $a \in I$ tel que

$$\tilde{u} \cdot \tilde{v} = 1 + a.$$

On regarde a comme une fonction analytique sur \mathcal{Y} . Par définition du tube $]X[$, on a que, pour tout $x \in]X[$:

$$|a(x)| < 1.$$

La fonction $1 + a$ est donc inversible sur cet ouvert et son inverse est la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a(x)^n$$

qui converge.

L'inverse de \tilde{u} est alors

$$\tilde{u}^{-1} = \tilde{v}(1 + a)^{-1}.$$

\square

Pour tous i, j des éléments de Λ on note $v_{ij} \in A_{ij}$ l'inverse de u_{ij} . On choisit alors des relèvements de ces deux éléments que l'on note ;

$$\tilde{u}_{ij} \in \mathcal{A}_{ij} \text{ et } \tilde{v}_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}.$$

On sait grâce au lemme 2.1.2 que

$$\tilde{u}_{ij} \in \Gamma(]X_{ij}[, \mathcal{O}_{]X[}^*).$$

De plus pour tous i, j, k éléments de Λ , on regarde :

$$\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{v}_{ik} \cdot \tilde{u}_{jk}.$$

Comme (u) est un cocycle, la réduction modulo I_{ijk} de ce terme est égale 1. Il existe donc $b_{ijk} \in I_{ijk}$ tel que :

$$\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ik} \cdot \tilde{u}_{jk} = 1 + b_{ijk}.$$

A partir de là, dans $\Gamma(\mathbb{A}_{X_{ijk}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{X_{ijk}}})$, il existe y_{ijk} tel que

$$\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ik}^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk} = (1 + b_{ijk}) \cdot (1 + a_{ij})^{-1} = 1 + y_{ijk}.$$

De plus, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{A}_{X_{ijk}}$, on a :

$$|y_{ijk}(x)| < 1.$$

Comme ci dessus :

$$c_{ijk} := \log(\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ik}^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y_{ijk}^n}{n}$$

converge sur $\mathbb{A}_{X_{ijk}}$.

On note \mathfrak{U}_K le recouvrement admissible de \mathbb{A}_K par les ouverts \mathbb{A}_i [6, 1.1.14]. On considère alors le bicomplexe $C^*(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^*)$. On note d la différentielle provenant de la différentielle du complexe $\Omega_{\mathbb{A}_K}^*$ et δ celle qui provient du complexe de Čech. On considère alors le complexe simple associé, encore noté $C^*(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^*)$, muni de sa différentielle définie sur le terme $C^p(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^q)$ par :

$$\Delta = \delta + (-1)^p d.$$

On construit un élément

$$c_1(u) \in C^2(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^*) = C^0(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^2) \oplus C^1(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^1) \oplus C^2(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K})$$

en posant :

$$\begin{aligned} c_1(u)_i &= 0, \\ c_1(u)_{ij} &:= d(\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ij}^{-1}) \in C^1(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^1), \end{aligned}$$

et

$$c_1(u)_{ijk} := -\log(\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ik}^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}) \in C^2(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K}).$$

Il est clair qu'avec les notations ci-dessus on a :

$$\Delta(c_1(u)) = 0.$$

Notons que l'élément ainsi construit dépend du choix de nos relèvements ; nous allons montrer cependant que sa classe dans $\mathbb{H}^2(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^*)$ n'en dépend pas.

Soient $(u) \in C^1(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K}^*)$ et $(\theta) \in C^0(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K}^*)$. On pose :

$$(2.A) \quad u' = u \cdot \delta(\theta).$$

Comme précédemment, on choisit pour tout $i \in \Lambda$, des relèvements $\tilde{\theta}_i \in \mathcal{A}_i$ de θ_i . Le lemme 2.1.2 nous dit que la fonction $\tilde{\theta}_i$ est inversible sur \mathbb{A}_i . On pose :

$$(2.B) \quad \zeta_i = \frac{d\tilde{\theta}_i}{\tilde{\theta}_i} \in C^0(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\mathbb{A}_K}^1).$$

De plus l'équation 2.A nous dit que pour tous $i, j \in \Lambda$, si \tilde{u}_{ij} et \tilde{u}'_{ij} sont respectivement des relèvements de u_{ij} et u'_{ij} , il existe $\alpha_{ij} \in \Gamma(\text{]}X_{ij}[, \mathcal{O}_{\text{]}X[})$ tel que pour tout $x \in \text{]}X_{ij}[$ on ait $|\alpha_{ij}(x)| < 1$ et que :

$$\tilde{\theta}_i \tilde{u}'_{ij} = \tilde{\theta}_j \tilde{u}_{ij} (1 + \alpha_{ij})$$

où $\tilde{\theta}_i$ et $\tilde{\theta}_j$ sont vus comme des éléments de $\Gamma(\text{]}X_{ij}[, \mathcal{O}_{\text{]}X[})$ par les flèches de restriction évidentes.

On pose alors :

$$(2.C) \quad \zeta_{ij} = -\log(1 + \alpha_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\text{]}X[}),$$

où le log est défini comme précédemment.

Les formules 2.B et 2.C définissent :

$$\zeta \in C^1(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^*) = C^0(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^1) \oplus C^1(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\text{]}X[}).$$

Lemme 2.1.3. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$c_1(u') - c_1(u) = \Delta(\zeta).$$

DÉMONSTRATION : On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & C^0(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^1) & & C^1(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\text{]}X[}) & \\ & \swarrow d & \searrow \delta & \swarrow -d & \searrow \delta \\ C^0(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^2) & & C^1(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^1) & & C^2(\mathfrak{U}_K, \mathcal{O}_{\text{]}X[}). \end{array}$$

On va calculer $\Delta(\zeta)$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta)_i &= d \left(\frac{d\tilde{\theta}_i}{\tilde{\theta}_i} \right) = 0. \\ \Delta(\zeta)_{ij} &= \delta(\zeta_i) - d(\zeta_{ij}) \\ &= \frac{d\tilde{\theta}_j}{\tilde{\theta}_j} - \frac{d\tilde{\theta}_i}{\tilde{\theta}_i} + d \log(1 + \alpha_{ij}) \\ &= \frac{d\tilde{u}'_{ij}}{\tilde{u}'_{ij}} - \frac{d\tilde{u}_{ij}}{\tilde{u}_{ij}}. \\ \Delta(\zeta)_{ijk} &= \delta(\zeta_{ij}) \\ &= -\log \left(\frac{\tilde{\theta}_i \tilde{u}'_{ij} \cdot \tilde{\theta}_k \tilde{u}_{ik} \cdot \tilde{\theta}_j \tilde{u}_{jk}}{\tilde{\theta}_j \tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{\theta}_i \tilde{u}'_{ik} \cdot \tilde{\theta}_k \tilde{u}_{jk}} \right) \\ &= \log(\tilde{u}_{ij} \cdot \tilde{u}_{ik}^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}) - \log(\tilde{u}'_{ij} \cdot \tilde{u}'_{ik}^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}). \end{aligned}$$

□

On a donc montré que l'élément $c_1(u) \in \mathbb{H}^2(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^*)$ ne dépend ni du représentant du cocycle choisi ni des choix de relèvements (ce dernier cas est obtenu en prenant pour θ le cocycle trivial : $\theta_i = 1$).

On construit donc bien ainsi une application

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow \mathbb{H}^2(\mathfrak{U}_K, \Omega_{\text{]}X[}^*).$$

Il est clair que cette application est compatible au raffinement du recouvrement \mathfrak{U} . De plus, d'après le théorème B [15], on sait que :

$$H_{rig}^2(X/K) = \mathbb{H}^2(\mathcal{I}X[, \Omega_{\mathcal{I}X}^*] = \mathbb{H}^2(\mathfrak{U}, \Omega_{\mathcal{I}X}^*).$$

Grâce à un plongement diagonal, on peut alors montrer que l'application ainsi construite ne dépend pas du choix du plongement. On note donc :

$$c_{1,rig} : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H_{rig}^2(X/K),$$

l'application obtenue.

Proposition 2.1.4 (Fonctorialité). *Soient X et X' deux k -variétés propres et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme. Pour tout faisceau inversible \mathcal{F} sur X on a :*

$$c_{1,rig}(f^* \mathcal{F}) = f^* c_{1,rig}(\mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION : La démonstration se fait par un calcul classique. Nous n'allons cependant pas le développer ici car nous allons donner plus tard une définition cristalline des classes de Chern et la fonctorialité sera alors évidente.

Proposition 2.1.5 (Multiplicativité). *Soient X une k -variété propre et deux faisceaux inversibles \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur X , on a :*

$$c_{1,rig}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') = c_{1,rig}(\mathcal{F}) + c_{1,rig}(\mathcal{F}').$$

L'application $c_{1,rig}$ est donc un morphisme de groupe.

DÉMONSTRATION : On choisit un recouvrement \mathfrak{U} qui trivialise les deux faisceaux. Dès lors en notant (u) et (u') des cocycles représentant respectivement \mathcal{F} et \mathcal{F}' , le faisceau $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ est représenté par le cocycle $(u.u')$. En choisissant (\tilde{u}) et (\tilde{u}') des relèvements de (u) et (u') respectivement, on a :

$$c_1(u.u')_{ij} = d(\tilde{u}_{ij}.\tilde{u}'_{ij}).(\tilde{u}_{ij}.\tilde{u}'_{ij})^{-1} = c_1(u)_{ij} + c_1(u')_{ij}.$$

et

$$c_1(u.u')_{ijk} = -\log(\tilde{u}_{ij}\tilde{u}'_{ij}.\tilde{u}_{ik}^{-1}\tilde{u}'_{ik}^{-1}.\tilde{u}_{jk}\tilde{u}'_{jk}) = c_1(u)_{ijk} + c_1(u')_{ijk}.$$

□

Proposition 2.1.6 (Extension des scalaires). *Soit K' une extension de K , d'anneau des entiers \mathcal{V}' et de corps résiduels k' . Pour tout faisceau inversible \mathcal{F} sur X on note \mathcal{F}' le faisceau inversible sur $X' = X \times_k k'$ obtenu par changement de base. Le morphisme*

$$H_{rig}^2(X/K) \rightarrow H_{rig}^2(X'/K')$$

envoie alors $c_{1,rig}(\mathcal{L})$ sur $c_{1,rig}(\mathcal{L}')$.

DÉMONSTRATION : Il est clair que toutes nos constructions commutent aux changements de corps de base. □

Par la suite, on pourra donc choisir pour \mathcal{V} un anneau de Cohen associé à k .

2.2. Les autres classes. Nous allons suivre la méthode classique [13] afin de construire les autres classes de Chern d'un faisceau localement libre.

Nous allons calculer la cohomologie rigide d'un fibré projectif sur une base propre. Plus précisément on se donne X une k -variété propre et \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r . On note alors $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ le fibré projectif associé, $p : \mathbb{P} \rightarrow X$ la projection et

$$\xi = c_{1,rig}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \in H_{rig}^2(\mathbb{P}/K).$$

On peut alors regarder ξ comme un morphisme dans $D^+(X_{Zar})$:

$$\xi : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{R}p_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(\mathbb{P}/K)[2],$$

où \mathbb{Z}_X est le faisceau constant \mathbb{Z} sur X . Par cup-produit on a alors :

$$\xi^i : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{R}p_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(\mathbb{P}/K)[2i].$$

Enfin on a le morphisme de fonctorialité :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(X/K) \rightarrow \mathbb{R}p_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(\mathbb{P}/K).$$

On en déduit alors le morphisme dans $D^+(X_{Zar})$:

$$(2.D) \quad \bigoplus_{i=0}^{r-1} \xi^i : \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(X/K)[-2i] \rightarrow \mathbb{R}p_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{rig}(\mathbb{P}/K)$$

Proposition 2.2.1. *Avec les notations précédentes, l'application (2.D) est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION : La démonstration est classique. La question étant locale, on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^r$. On se donne alors une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{Y}$ dans un \mathcal{V} -schéma formel lisse. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_X^r & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}^r & \longleftarrow & \mathbb{P}_{]X[}^r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longleftarrow &]X[\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(\mathcal{V}) & \longleftarrow & \mathrm{Spm}(K) \end{array}$$

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^r}(1)$ se relevant en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}^r}(1)$, on est ramené au lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *Soit X un affinoïde, la flèche définie comme précédemment :*

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} \Omega_{X/K}^*[-2i] \rightarrow \mathbb{R}p_* \Omega_{\mathbb{P}_X/K}^*$$

est un isomorphisme

DÉMONSTRATION : La démonstration est analogue au cas analytique complexe [27]. Ce résultat peut être obtenu directement en utilisant un théorème de type GAGA relatif en géométrie rigide [16, 2.8]. Il suffit pour cela de voir que la démonstration de [25] se recopie dans notre cas.

□

Corollaire 2.2.3. *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout n la décomposition suivante :*

$$H_{rig}^n(\mathbb{P}/K) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H_{rig}^{n-2i}(X/K) \cdot \xi^i.$$

On définit les classes de Chern supérieures comme dans le cas classique. On applique la décomposition du corollaire 2.2.3 à ξ^r et on obtient :

$$(2.E) \quad \xi^r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} c_i(\mathcal{E}) \xi^{r-i},$$

avec

$$c_i(\mathcal{E}) \in H_{rig}^{2i}(X/K).$$

Définition 2.2.4. *Avec les notations précédentes, pour $0 < i \leq r$ on appelle i -ème classe de Chern de \mathcal{E} la classe $c_i(\mathcal{E})$. On pose de plus*

$$c_0(\mathcal{E}) = 1 \text{ dans } H_{rig}^0(X/K).$$

REMARQUE : En appliquant ce que l'on vient de voir à un fibré inversible \mathcal{F} , on retrouve notre première classe de Chern. En effet la décomposition 2.E devient alors :

$$c_{1,rig}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = p^* c_1(\mathcal{F}).$$

Or la fonctorialité de $c_{1,rig}$ nous donne

$$c_{1,rig}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = p^* c_{1,rig}(\mathcal{F}).$$

On conclut en utilisant que p^* est injectif.

Proposition 2.2.5 (Fonctorialité). *Soient X et X' deux k -variétés propres et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme. Pour tout \mathcal{E} faisceau localement libre de rang r sur X et tout i , on a*

$$c_i(f^* \mathcal{E}) = f^* c_i(\mathcal{E}).$$

DÉMONSTRATION : On note $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(f^*(\mathcal{E}))$ et $\xi' = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))$. La fonctorialité de la première classe de Chern nous assure que

$$\xi' = f^* \xi.$$

On applique alors f^* à la décomposition 2.E. Le morphisme f^* étant compatible au produit, on obtient dans $H_{rig}^{2r}(\mathbb{P}'/K)$:

$$\xi'^r = \sum_{i=1}^r (-1)^i f^* c_i(\mathcal{E}) \xi'^{r-i}.$$

La décomposition étant unique on a :

$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E}).$$

□

REMARQUE : La définition utilisée pour la cohomologie rigide ne permet pas d'utiliser la méthode classique [12] pour démontrer l'additivité des classes de Chern. Nous différerons donc la démonstration de cette propriété à la section suivante.

3. CONSTRUCTION CRISTALLINE ET COMPARAISONS

Après avoir fait quelques rappels sur les topos cristallins de niveau m , nous construisons des classes de Chern à valeurs dans ces derniers en nous inspirant du cas cristallin classique (de niveau 0) [10]. Cela nous permettra de donner une construction cristalline des classes de Chern rigides construites précédemment. Cette formulation permet d'appliquer la méthode classique [12, 10] pour démontrer l'additivité des classes de Chern en se ramenant à une situation universelle.

On établira aussi un théorème de comparaison avec les classes de Chern à valeur dans le topos convergent [19].

3.1. Les topos m -cristallins. Nous allons énoncer les principaux résultats sur la cohomologie cristalline de niveau m . Pour de plus amples informations on pourra consulter [26]. Il sera aussi utile pour les puissances divisées de niveau m de regarder [7].

On fixe une fois pour toutes un nombre premier p . Commençons par rappeler la définition d'un m -PD-idéal et de l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m . On trouvera un exposé détaillé de cette théorie dans [7, 1].

Définition 3.1.1. Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $I \subset A$ un idéal et $m \geq 0$ un entier. On appelle structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m sur I (m -PD-structure) la donnée d'un PD-idéal $(J, \gamma) \subset I$ tel que

$$I^{(p^m)} + pI \subset J.$$

Définition 3.1.2. Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre et $I \subset A$ un idéal quelconque. Il existe une A -algèbre $P^m(I)$ et un m -PD-idéal $\bar{I} \subset P^m(I)$ tel que $IP^m(I) \subset \bar{I}$, qui soient universels pour les morphismes de A dans un anneau A' envoyant I dans un m -PD-idéal I' . Cette algèbre munie de son m -PD-idéal est appelée l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m de (A, I) .

REMARQUE : On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & P^m(I) & \\ \nearrow & & \searrow \\ A & \xrightarrow{\quad} & A/I. \end{array}$$

Soit C un anneau de Cohen pour k . On rappelle [3, I.1.2.4] qu'il existe une unique structure de PD-idéal sur l'idéal maximal de C notée γ . On note $S = \mathrm{Spf}(C)$. Dans

toute la suite nous ne regarderons que les topos cristallins de base S car c'est eux qui interviennent dans la comparaison avec la cohomologie rigide.

Définition 3.1.3. Soient X un S -schéma sur lequel p est localement nilpotent et $m \in \mathbb{N}$. On appelle site cristallin de niveau m de X relativement à $(S, (p), \gamma)$ et on note $\text{Cris}^m(X/S)$ le site ayant pour objets les S -immersions fermées $U \hookrightarrow T$ où U est un ouvert de X , p est localement nilpotent sur T et où l'idéal définissant ces immersions est muni d'une m -PD-structure compatible à γ .

Par la suite nous appellerons *topos cristallin de niveau m* et nous noterons $(X/S)_{\text{cris}}^m$ le topos associé au site $\text{Cris}^m(X/S)$.

REMARQUE : pour $m = 0$ on retrouve le topos cristallin classique.

Il est possible de donner une description des objets du topos cristallin de niveau m similaire à celle que l'on a pour le topos cristallin classique. Pour définir un faisceau \mathcal{F} du topos cristallin de niveau m , il suffit de donner pour tout élément (U, T) du site m -cristallin, un faisceau zariskien $\mathcal{F}_{(U, T)}$ (noté aussi \mathcal{F}_T) sur T ; ces données étant assujetties à des hypothèses de compatibilités similaires à celles du cas classique.

On peut de cette manière construire les faisceaux suivants :

- Le faisceau $\mathcal{O}_{X/S}^m$ est défini par :

$$(\mathcal{O}_{X/S}^m)_{(U, T)} = \mathcal{O}_T.$$

- Le faisceau $\mathcal{I}_{X/S}^m$ est défini par :

$$(\mathcal{I}_{X/S}^m)_{(U, T)} = \mathcal{I}_T$$

où \mathcal{I}_T est le faisceau définissant l'immersion $U \hookrightarrow T$.

- Le faisceau $\mathcal{J}_{X/S}^m$ est défini par :

$$(\mathcal{J}_{X/S}^m)_{(U, T)} = \mathcal{J}_T$$

où \mathcal{J}_T est le PD-idéal définissant la m -PD structure sur \mathcal{I}_T .

NOTATIONS : Pour tout k -variété X et tout m , on note :

$$H_{m-\text{cris}}^i(X) := H^i((X/S)_{\text{cris}}^m, \mathcal{O}_{X/S}^m).$$

Nous allons maintenant étudier comment se comportent ces topos quand on fait varier m .

Proposition 3.1.4. Pour tous m, m' avec $m \leq m'$ il existe un morphisme de topos :

$$i_{m', m} : (X/S)_{\text{cris}}^m \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}^{m'}.$$

De plus ces morphismes vérifient que pour tout triplet $m \leq m' \leq m''$ on a :

$$i_{m'', m} \xrightarrow{\sim} i_{m'', m'} \circ i_{m', m}.$$

Ces morphismes sont donnés de la manière suivante :

– pour tout \mathcal{E}' dans $(X/S)_{cris}^{m'}$ et tout $(U, T, \mathcal{I}) \in Cris^m(X/S)$ on a :

$$\Gamma((U, T), i_{m', m}^* \mathcal{E}') = \Gamma((U, T), \mathcal{E}')$$

en utilisant que l'idéal \mathcal{I} définissant la m -PD-structure de \mathcal{I} définit aussi une m' -PD-structure sur \mathcal{I} .

– pour tout \mathcal{E} dans $(X/S)_{cris}^m$ et tout $(U, T, \mathcal{I}) \in Cris^{m'}(X/S)$ on a :

$$\Gamma((U, T), i_{m', m*} \mathcal{E}) = \Gamma((U, T^m), \mathcal{E})$$

où T^m est l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de \mathcal{I} compatible aux puissances divisées définissant la m' -PD-structure de \mathcal{I} .

On construit alors un morphisme canonique

$$u_{m', m} : \mathcal{O}_{X/S}^{m'} \rightarrow i_{m', m*} \mathcal{O}_{X/S}^m$$

qui est donné sur un épaississement (U, T) par le morphisme canonique $\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_{T^m}$. Le morphisme $i_{m', m}$ devient ainsi un morphisme de topos annelés.

Pour finir avec ces généralités sur les topos m -cristallins, notons qu'il existe, comme dans le cas classique, un morphisme de projection sur le topos zariskien :

$$u_{X/S}^m : (X/S)_{cris}^m \rightarrow X_{Zar},$$

ainsi qu'un morphisme d'inclusion du topos Zariskien dans le topos m -cristallin :

$$i_{X/S}^m : X_{Zar} \rightarrow (X/S)_{cris}^m.$$

Lemme 3.1.5. *Pour tous m, m' avec $m \leq m'$ on a les diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{array}{ccc} (X/S)_{cris}^m & \xrightarrow{u_{X/S}^m} & X_{Zar} \\ i_{m', m} \downarrow & & \parallel \\ (X/S)_{cris}^{m'} & \xrightarrow{u_{X/S}^{m'}} & X_{Zar} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X_{Zar} & \xrightarrow{i_{X/S}^m} & (X/S)_{cris}^m \\ \parallel & & \downarrow i_{m', m} \\ X_{Zar} & \xrightarrow{i_{X/S}^{m'}} & (X/S)_{cris}^{m'} \end{array}$$

3.2. Classes de Chern m -cristallines. Nous allons généraliser la construction de [10] au cas des topos m -cristallins. On se fixe $m \in \mathbb{N}$, avec les notations précédentes, on a, comme dans le cas de la cohomologie cristalline de niveau 0, une suite exacte dans $(X/S)_{cris}^m$:

$$0 \rightarrow 1 + \mathcal{I}_{X/S}^m \rightarrow (\mathcal{O}_{X/S}^m)^* \rightarrow i_*^m(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow 0.$$

On considère le cobord de cette suite exacte qui nous fournit un morphisme dans $D^+((X/S)_{cris}^m, Ab)$:

$$(3.A) \quad i_*^m(\mathcal{O}_X^*)[1] \rightarrow (1 + \mathcal{I}_{X/S}^m)[2].$$

L'élévation à la puissance p^m nous donne un morphisme :

$$1 + \mathcal{I}_{X/S}^m \rightarrow 1 + \mathcal{I}_{X/S}^m.$$

L'idéal $\mathcal{I}_{X/S}^m$ est muni d'une structure de PD -idéal, on peut donc construire un logarithme. En le composant avec le morphisme précédent on obtient :

$$\psi_m : \begin{array}{ccc} 1 + \mathcal{I}_{X/S}^m & \rightarrow & \mathcal{I}_{X/S}^m \\ (1+x) & \mapsto & \log((1+x)^{p^m}) \end{array}$$

En composant 3.A avec ψ_m , on obtient

$$(3.B) \quad c_{1,m} : i_*^m(\mathcal{O}_X^*)[1] \rightarrow \mathcal{I}_{X/S}^m[2].$$

Par suite en composant avec $\mathcal{I}_{X/S}^m \rightarrow \mathcal{O}_{X/S}^m$ et en passant à la cohomologie on a :

$$(3.C) \quad c_{1,m} : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H_{m-cris}^2(X).$$

Proposition 3.2.1 (Fonctorialité). *Soient X et Y deux k -variétés, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme et \mathcal{F} un faisceau inversible sur Y , on a*

$$c_1(f^* \mathcal{F}) = f^* c_1(\mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION : La preuve de notre proposition découle directement du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X/S)_{cris}^m & \xrightarrow{f_{cris}^m} & (Y/S)_{cris}^m \\ u_{X/S} \downarrow & & \downarrow u_{Y/S} \\ X_{Zar} & \xrightarrow{f^m} & Y_{Zar} \end{array}$$

et du fait que les suites exactes utilisées sont fonctorielles. □

Maintenant que l'on a construit la première classe de Chern d'un faisceau inversible, nous allons en déduire les autres par la méthode habituelle [13].

On se donne \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r sur X , on note $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ son fibré projectif et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ le faisceau canonique sur ce dernier. Le morphisme structural de \mathbb{P} sera noté $p : \mathbb{P} \rightarrow X$.

On a alors le diagramme commutatif de morphismes de topos suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}/S)_{cris}^m & \xrightarrow{p_{cris}^m} & (X/S)_{cris}^m \\ u_{\mathbb{P}/S} \downarrow & & \downarrow u_{X/S} \\ \mathbb{P}_{Zar} & \xrightarrow{p} & X_{Zar}. \end{array}$$

On note

$$\xi = c_{1,m}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \in H_{m-cris}^2(\mathbb{P}).$$

On peut alors voir pour tout i , ξ^i comme un morphisme dans $D^+((X/S)_{cris}^m, Ab)$:

$$\xi^i : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{R}p_{cris*}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}/S}^m[2i].$$

De même, le morphisme p_{cris}^m nous donne un morphisme :

$$\mathcal{O}_{X/S}^m \rightarrow \mathbb{R}p_{cris*}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}/S}^m.$$

On en déduit alors comme dans le cas classique :

$$(3.D) \quad \bigoplus_{i=0}^{r-1} \xi^i : \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_{X/S}^m[-2i] \rightarrow \mathbb{R}p_{cris*}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}/S}^m.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Avec les notations précédentes, l'application (3.D) est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION : On remarque que, la question étant locale, on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^r$ et qu'il existe une immersion fermée de X dans Y un S -schéma formel lisse. En notant $\widehat{\mathfrak{P}}$ l'enveloppe à puissance m -divisée de cette immersion on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_X^r & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\widehat{\mathfrak{P}}}^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{P}} \end{array}$$

Dans cette situation, la cohomologie m -cristalline se calcule comme la cohomologie de De Rham de l'enveloppe à puissances divisées. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^r}(1)$ se relevant en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widehat{\mathfrak{P}}}^r}(1)$, on est ramené au même problème pour la cohomologie de De Rham de \mathbb{P}^r sur $\widehat{\mathfrak{P}}$. La proposition est connue dans ce cas. □

Corollaire 3.2.3. *Avec les notations ci-dessus on a pour tout n la décomposition suivante :*

$$H_{m-cris}^n(\mathbb{P}) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H_{m-cris}^{n-2i}(X).$$

On définit les autres classes de Chern comme dans le cas classique. On applique la décomposition du corollaire 3.2.3 à ξ^r et on obtient :

$$\xi^r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} c_{i,m}(\mathcal{E}) \xi^{r-i},$$

avec :

$$c_{i,m}(\mathcal{E}) \in H_{m-cris}^{2i}(X).$$

Par définition $c_i(\mathcal{E})$ est la i -ème classe de Chern de \mathcal{E} .

REMARQUE : Comme dans la section 2, on note $c_0(\mathcal{E}) = 1$ dans $H_{m-cris}^0(X)$.

Nous allons nous intéresser à l'additivité des classes de Chern définies ci-dessus. La démonstration utilisant une comparaison avec la cohomologie de De Rham, nous nous contenterons de regarder la situation après tensorisation par \mathbb{Q} ¹.

Plus précisément, on note

$$H_{m,\mathbb{Q}}^i(X) := H^i((X/S)_{cris}^m, \mathcal{O}_{X/S} \otimes \mathbb{Q})$$

et, pour tout faisceau localement libre \mathcal{E} sur X

$$c_{i,m}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \in H_{m,\mathbb{Q}}^{2i}(X),$$

la i -ème classe de Chern définie comme ci-dessus.

Proposition 3.2.4 (Additivité). *Soient X une k -variété, \mathcal{E} , \mathcal{E}' et \mathcal{E}'' trois faisceaux localement libres tels que l'on ait la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0.$$

On a alors pour tout m et tout i on a dans $H_{m,\mathbb{Q}}^{2i}(X)$:

$$c_{i,m}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) = \sum_{j=0}^i c_{j,m}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') c_{i-j,m}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}'').$$

DÉMONSTRATION : La fonctorialité de nos constructions permet de les généraliser au cas des variétés simpliciales. On peut donc appliquer la méthode classique [12, pp 217-224] qui consiste à se ramener à une situation universelle. Remarquons que notre théorie cohomologique ne vérifie pas les axiomes demandés par *loc. cit.*, cependant pour ramener l'additivité des classes de Chern à la situation universelle sur $B_{\bullet}GL$ on n'a besoin que du corollaire 3.2.3. A partir de là, on ne regarde que des variétés lisses relevables. On déduit donc notre proposition du résultat similaire en cohomologie de De Rham. \square

Proposition 3.2.5. *Soient X une k -variété et \mathcal{E} un faisceau localement libre sur X . Pour tous m, m' avec $m \leq m'$, on a pour tout i :*

$$\phi_{m',m} c_{i,m'}(\mathcal{E}) = p^{i(m'-m)} c_{i,m}(\mathcal{E})$$

où $\phi_{m',m} : H^{2i}((X/S)_{cris}^{m'}, \mathcal{O}_{X/S}^{m'}) \rightarrow H^{2i}((X/S)_{cris}^m, \mathcal{O}_{X/S}^m)$ est le morphisme induit par $u_{m',m}$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de le voir pour la première classe de Chern d'un faisceau inversible. Ce dernier cas découle directement de la définition. \square

¹Soient X une k -variété et $X^{(m)}$ le pull-back par le m -ième itéré du Frobenius de k . Pour tout faisceau localement libre \mathcal{E} sur X , on notera $\mathcal{E}^{(m)}$ son pull-back sur $X^{(m)}$. Il semble clair alors que la classe de Chern $c_{i,m}(\mathcal{E})$ a pour valeur dans $H_m^{2i}(X)$ soit l'image de la classe $c_{i,0}(\mathcal{E}^{(m)})$ par le morphisme

$$F_m^* : H_{cris}^{2i}(X^{(m)}) \rightarrow H_{m-cris}^{2i}(X),$$

dont on trouve la définition dans [5]. On déduit alors de l'additivité des classes de Chern cristallines de niveau 0, l'additivité des classes de Chern m -cristallines.

3.3. Le topos $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$. Nous allons construire un topos permettant de calculer la cohomologie rigide de manière cristalline. Ce topos se construit comme le topos associé à un diagramme de topos [2, IV, 7] ou [14, VI]. Le cas particulier nous intéressant, à savoir le cas des systèmes inductifs de topos est repris dans [22, II].

Définition 3.3.1. Avec les notations précédentes, on notera $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$ le topos associé au diagramme de topos $((X/S)_{\text{cris}}^m, i_{m',m})_{m \in \mathbb{N}}$.

NOTATIONS : On notera souvent un objet de ce topos de la manière suivante

$$\mathcal{F}^\bullet = (\mathcal{F}^0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{F}^m \leftarrow \dots).$$

On pose alors :

$$\mathcal{O}_{X/S}^\bullet = (\mathcal{O}_{X/S}^0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{O}_{X/S}^m \leftarrow \dots),$$

les flèches de transition étant, pour $m \leq m'$, les morphismes $u_{m',m}$ définis précédemment. De la même manière, on pose :

$$\mathcal{I}_{X/S}^\bullet = (\mathcal{I}_{X/S}^0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{I}_{X/S}^m \leftarrow \dots)$$

On considère alors le topos $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$ comme annelé par $\mathcal{O}_{X/S}^\bullet$. On a les morphismes de topos annelés suivants :

$$p_m : ((X/S)_{\text{cris}}^m, \mathcal{O}_{X/S}^m) \rightarrow ((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, \mathcal{O}_{X/S}^\bullet).$$

Le lemme 3.1.5 nous dit que les morphismes de topos

$$u_{X/S}^m : (X/S)_{\text{cris}}^m \rightarrow X_{\text{Zar}} \text{ (resp. } i_{X/S}^m : X_{\text{Zar}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}^m)$$

permettent de construire un morphisme de topos :

$$u_{X/S}^\bullet : (X/S)_{\text{cris}}^\bullet \rightarrow X_{\text{Zar}}^\bullet \text{ (resp. } i_{X/S}^\bullet : X_{\text{Zar}}^\bullet \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}^\bullet).$$

De même, les foncteurs sections globales $\Gamma((X/S)_{\text{cris}}^m, -) : (X/S)_{\text{cris}}^m \rightarrow (Ens)$ donnent naissance à un foncteur :

$$\Gamma^\bullet((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -) : (X/S)_{\text{cris}}^\bullet \rightarrow (Ens)^\bullet.$$

De plus, l'égalité de foncteurs :

$$\Gamma((X/S)_{\text{cris}}^m, -) = \Gamma(X_{\text{Zar}}, -) \circ u_{X/S*}^m$$

implique que :

$$\Gamma^\bullet((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -) = \Gamma^\bullet(X_{\text{Zar}}^\bullet, -) \circ u_{X/S*}^\bullet$$

où $\Gamma^\bullet(X_{\text{Zar}}^\bullet, -)$ est le foncteur de X_{Zar}^\bullet dans $(Ens)^\bullet$ défini de la même manière que $\Gamma^\bullet((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -)$.

REMARQUE : On fera attention à ne pas confondre les foncteurs $\Gamma^\bullet((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -)$ et $\Gamma^\bullet(X_{\text{Zar}}^\bullet, -)$ avec les foncteurs sections globales des topos $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$ et X_{Zar}^\bullet . On a cependant

$$\Gamma((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -) = \varprojlim \circ \Gamma^\bullet((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, -) \text{ et } \Gamma(X_{\text{Zar}}^\bullet, -) = \varprojlim \circ \Gamma^\bullet(X_{\text{Zar}}^\bullet, -).$$

NOTATIONS : Par la suite, nous noterons $\mathbb{R}\Gamma_{\text{cris}\bullet}(X)$ le complexe $\mathbb{R}\varprojlim_m ((\mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet \mathcal{O}_{X/S}^\bullet) \otimes \mathbb{Q})$

et

$$H_{\text{cris}\bullet}^*(X) := H^*(X_{\text{Zar}}^\bullet, (\mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet \mathcal{O}_{X/S}^\bullet) \otimes \mathbb{Q}) = H^*(X_{\text{Zar}}, \mathbb{R}\Gamma_{\text{cris}\bullet}(X)).$$

3.4. Interprétation cristalline de la cohomologie rigide. Les définitions précédentes permettent d'énoncer l'interprétation cristalline de la cohomologie rigide.

Théorème 3.4.1 (Berthelot). *Soit X une k -variété propre. En reprenant les notations précédentes on a*

$$\mathbb{R}\Gamma_{\text{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{\text{cris}\bullet}(X).$$

DÉMONSTRATION : Remarquons juste que la démonstration de ce théorème utilise un calcul de la cohomologie m -cristalline à l'aide de la cohomologie de De Rham qui ne se fait qu'à torsion près, il est donc nécessaire de tensoriser par \mathbb{Q} . La démonstration se trouve dans [5]. \square

En passant à la cohomologie on obtient :

$$H_{\text{rig}}^i(X/K) \xrightarrow{\sim} H_{\text{cris}\bullet}^i(X).$$

3.5. Construction des classes de Chern sur $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$. La construction est similaire à celle des classes de Chern m -cristalline.

Avec les notations précédentes, on a la suite exacte dans $(X/S)_{\text{cris}}^\bullet$:

$$0 \rightarrow 1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet \rightarrow (\mathcal{O}_{X/S}^*)^\bullet \rightarrow i_*^\bullet(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow 0.$$

Pour le démontrer il suffit d'utiliser la famille conservative des p_m^{-1} . On obtient donc un morphisme dans $D^+((X/S)_{\text{cris}}^\bullet, Ab)$:

$$i_*^\bullet(\mathcal{O}_X^*)[1] \rightarrow (1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)[2].$$

En projetant ce dernier sur le topos zariskien on obtient dans $D^+(X_{\text{Zar}}^\bullet, Ab)$ le morphisme :

$$(3.E) \quad (\mathcal{O}_X^*)^\bullet[1] \rightarrow \mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)[2].$$

Cependant, les morphismes ψ_m définis précédemment ne construisent pas un morphisme sur les systèmes projectifs car ils ne commutent pas aux flèches des systèmes projectifs.

On considère le système projectif :

$$(1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1) = (1 + \mathcal{I}_{X/S}^0 \xleftarrow{p} \dots \xleftarrow{p} 1 + \mathcal{I}_{X/S}^m \xleftarrow{p} \dots)$$

où les flèches de transition sont l'élévation à la puissance p des flèches classiques.

Les morphismes ψ_m définissent alors :

$$\psi^\bullet : (1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1) \rightarrow \mathcal{I}_{X/S}^\bullet.$$

Après projection sur le topos zariskien, on obtient :

$$\mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet((1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1))[2] \rightarrow \mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(\mathcal{I}_{X/S}^\bullet)[2].$$

En utilisant composant cette dernière avec la projection du morphisme $\mathcal{I}_{X/S}^\bullet \rightarrow \mathcal{O}_{X/S}^\bullet$, on a :

$$(3.F) \quad \mathbb{R}u_{X/S*}((1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1))[2] \rightarrow \mathbb{R}u_{X/S*}(\mathcal{O}_{X/S}^\bullet)[2].$$

On peut d'autre part construire un morphisme de $(1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1)$ dans $1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet$ défini par l'élévation à la puissance p^m en *degré* m .

On remarque alors que ce morphisme induit après tensorisation par \mathbb{Q} un isomorphisme dans $D^+(X_{Zar}^\bullet, Ab)$:

$$(3.G) \quad \mathbb{R}u_{X/S*}((1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}u_{X/S*}(1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet) \otimes \mathbb{Q}.$$

En composant 3.E, l'inverse de 3.G et 3.F, on obtient, après passage à la limite :

$$(3.H) \quad c_{1,\bullet} : (\mathcal{O}_X^*)[1] \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{cris\bullet}(X)[2].$$

Par suite en passant à la cohomologie on a :

$$(3.I) \quad c_{1,\bullet} : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H_{cris\bullet}^2(X).$$

Comme dans le cas m -cristallin, la première classe de Chern permet de calculer la cohomologie des fibrés projectifs. On peut donc construire classiquement les autres classes de Chern.

REMARQUE : Comme dans la section 2, on note $c_0(\mathcal{E}) = 1$ dans $H_{cris\bullet}^0(X)$. De plus, si \mathcal{E} est un faisceau inversible, on retrouve la première classe de Chern construite auparavant.

Proposition 3.5.1. *Les classes de Chern $c_{i,\bullet}$ vérifient les propriétés d'additivité et de fonctorialité.*

DÉMONSTRATION : Cela se démontre comme les énoncés similaires pour la cohomologie m -cristalline. □

3.6. Comparaison avec les classes de Chern rigides. Nous allons voir que les classes de Chern que nous venons de construire coïncident avec les classes de Chern rigides définies à la section 2. On se donne X , une k -variété propre, ainsi qu'un plongement $X \hookrightarrow \mathcal{Y}$ dans un schéma formel sur $S = \mathrm{Spf}(C)$ lisse au voisinage de X .

Proposition 3.6.1. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & & H_{cris\bullet}^2(X) \\ & \nearrow c_{1,\bullet} & \uparrow \wr \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & & \\ & \searrow c_{1,rig} & \uparrow \\ & & H_{rig}^2(X/K). \end{array}$$

où $c_{1,\bullet}$ est le morphisme 3.I et la flèche verticale se déduit de celle de 3.4.1.

DÉMONSTRATION :

Corollaire 3.6.2. *Les classes de Chern rigides vérifient la propriétés d'additivité.*

Nous allons, comme dans [11], réinterpréter la construction de nos classes de Chern cristallines à l'aide de faisceaux Zariskiens. Nous utiliserons alors des résolutions de Cech afin de les comparer avec la définition de la section 2.

Dans $D^+(X_{Zar})$ nous noterons avec un \mathbb{Q} en indice les complexes obtenus après tensorisation par \mathbb{Q} .

On notera Y_n la réduction modulo p^{n+1} de \mathcal{Y} , pour tout m et tout n , on note alors \mathfrak{P}_n^m l'enveloppe à puissance m -divisée de l'immersion de X dans Y_n , $\hat{\mathfrak{P}}^m$ sa complétion p -adique et $\hat{\mathfrak{P}}^\bullet$ le système projectif associé.

On regarde le complexe de De Rham et le complexe de De Rham multiplicatif dans X_{Zar}^\bullet , à savoir :

$$\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^* = \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet} \xrightarrow{d} \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^1 \rightarrow \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^2 \rightarrow \dots$$

et :

$$\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times = \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet}^* \xrightarrow{dlog} \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^1 \rightarrow \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^2 \rightarrow \dots$$

et on note $\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times$ (resp. $\mathcal{I}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^*$) le noyau de l'application de complexes $\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times \rightarrow (\mathcal{O}_X^*)^\bullet$ (resp. $\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^* \rightarrow (\mathcal{O}_X)^\bullet$). On rappelle que \mathcal{I}^m est l'idéal de X dans $\hat{\mathfrak{P}}^m$.

De plus, comme précédemment, on note :

$$(1 + \mathcal{I}^\bullet)(1) = (1 + \mathcal{I}^0 \xleftarrow{p} 1 + \mathcal{I}^1 \xleftarrow{p} \dots \xleftarrow{p} 1 + \mathcal{I}^m \xleftarrow{p} \dots)$$

et :

$$\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^i(1) = (\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^0/S}^i \xleftarrow{p} \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^1/S}^i \xleftarrow{p} \dots \xleftarrow{p} \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^m/S}^i \xleftarrow{p} \dots).$$

Enfin on pose :

$$\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times(1) = (1 + \mathcal{I}^\bullet)(1) \xrightarrow{dlog} \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^1(1) \rightarrow \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^2(1) \rightarrow \dots$$

On a alors un morphisme :

$$(\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times(1))_{\mathbb{Q}} \rightarrow (\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^*)_{\mathbb{Q}}$$

défini par les applications :

$$p^m \log : (1 + \mathcal{I}^m) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{P}}^m}$$

et

$$\times p^m : \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^m/S}^i \rightarrow \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^m/S}^i.$$

Avec ces notations on a le diagramme commutatif suivant dans $D^+(X_{zar}^\bullet)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(i_*^\bullet \mathcal{O}_X^*)[1] & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)_{\mathbb{Q}}[2] & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet((1 + \mathcal{I}_{X/S}^\bullet)(1))_{\mathbb{Q}}[2] & \longrightarrow & \mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(\mathcal{O}_{X/S}^\bullet)_{\mathbb{Q}}[2] \\
\parallel & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
(\mathcal{O}_X^*)^\bullet[1] & \xrightarrow{\partial} & (\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times)_{\mathbb{Q}}[2] & \xleftarrow{\sim} & (\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^\times(1))_{\mathbb{Q}}[2] & \longrightarrow & (\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^*)_{\mathbb{Q}}[2]
\end{array}$$

La première classe de Chern étant, par définition, l'application induite sur la cohomologie par la première ligne du diagramme, elle peut être calculée par la deuxième. Nous allons maintenant en faire un calcul explicite à l'aide de cocycles de Čech.

On sait que pour tout $\sigma \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, il existe un recouvrement \mathfrak{U} de \mathcal{Y} tel que σ soit l'image d'un élément (encore noté σ) de $H^1(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$.

NOTATIONS : on reprend les notations de la section 2. On notera de plus, \mathcal{I}_i^m l'idéal de X_i dans $\hat{\mathfrak{P}}_i^m$ et $I_i^m = \Gamma(\hat{\mathfrak{P}}_i^m, \mathcal{I}_i^m)$. De même, on note $\hat{\mathfrak{P}}_i^m = \mathrm{Spf}(\hat{P}_i^m)$. En notant $P_{n,i}^m$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $(\mathcal{A}_i/p^{n+1}\mathcal{A}_i, I_i/p^{n+1}I_i)$ où I_i est l'idéal de A_i dans \mathcal{A}_i , on a

$$\hat{P}_i^m = \varprojlim_n P_{n,i}^m.$$

On a alors des morphismes :

$$\pi_i^m : \hat{P}_i^m \rightarrow A_i.$$

On notera pour tout $m' > m$, $\varepsilon_i^{m,m'}$ la flèche entre $\hat{P}_i^{m'}$ et \hat{P}_i^m . Dans le cas particulier où $m' = m + 1$ nous la noterons simplement ε_i^m .

Avec ces notations, σ est donc représenté par un cocycle $u_{ij} \in C^1(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$. On regarde donc le cocycle $u_{ij}^m \in C^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{O}_X^*)^\bullet)$ défini par $u_{ij}^m = u_{ij}$ pour tout m . Ce cocycle définit une application dans $D^+(X_{Zar}) : \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{O}_X^*)^\bullet[1]$. Nous allons montrer que l'application de $D^+(X_{Zar})$

$$\mathbb{Z} \rightarrow (\Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^*)_{\mathbb{Q}}[2]$$

obtenue comme composition de cette application avec la deuxième ligne du diagramme précédent est représentable par un cocycle de $C^2(\mathfrak{U}, \Omega_{\hat{\mathfrak{P}}^\bullet/S}^* \otimes \mathbb{Q})$.

Définition 3.6.3. Avec les notations précédentes, pour tout $x \in A_i$ on appelle relèvement compatible de x une famille $(\tilde{x}^m) \in \prod_{m \in \mathbb{N}} \hat{P}_i^m$ telle que :

- pour tout m on ait $\pi_i^m(\tilde{x}^m) = x$
- pour tout $m' > m$ on ait $\varepsilon_i^{m,m'}(\tilde{x}^{m'}) = \tilde{x}^m$.

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{P}_i^{m'} & \\
 & \downarrow \varepsilon_i^{m,m'} & \searrow \pi_i^{m'} \\
 & \widehat{P}_i^m & \\
 \nearrow \pi_i^m & & \searrow \pi_i^m \\
 \mathcal{A}_i & \xrightarrow{\quad} & A_i
 \end{array}$$

montre que pour construire un relèvement compatible, il suffit de relever x dans \mathcal{A}_i et d'utiliser les morphismes $\mathcal{A}_i \rightarrow \widehat{P}_i^m$. En particulier, il existe toujours des relèvements compatibles.

On appellera système compatible un élément vérifiant la deuxième condition.

Soit $(\widetilde{u}_{ij}^m) \in \Pi_{m \in \mathbb{N}} \widehat{P}_{ij}^m$ un relèvement compatible de $u_{ij} = u_{ij}^m$.

Lemme 3.6.4. *Avec les notations précédentes, \widetilde{u}_{ij}^m est inversible dans \widehat{P}_{ij}^m .*

DÉMONSTRATION : On relève aussi $(u_{ij})^{-1}$ de manière compatible en \widetilde{v}_{ij}^m . On a alors :

$$\widetilde{u}_{ij}^m \cdot \widetilde{v}_{ij}^m = 1 + x_{ij}^m \in 1 + I_{ij}^m.$$

De plus, I_{ij}^m étant un m -PD-idéal, pour tout $x \in I_{ij}^m$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$x^k = q_k! x^{\{k\}_m}$$

où $k = p^m q_k + r_k$ et $0 \leq r_k < p^m$. À partir de là, on voit que x^k tend p -adiquement vers 0 quand k tend vers l'infini. Comme \widehat{P}_{ij}^m est complet, la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x_{ij}^m)^k$$

converge vers $(1 + x_{ij}^m)^{-1}$. L'inverse de \widetilde{u}_{ij}^m est donc :

$$\widetilde{v}_{ij}^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-x_{ij}^m)^k.$$

□

REMARQUE : ce lemme est l'analogue m -cristallin du lemme 2.1.2.

De plus il est clair d'après la définition que \widetilde{x}_{ij}^m et donc $(\widetilde{u}_{ij}^m)^{-1}$ sont des systèmes compatibles. À partir de là, on considère :

$$\frac{d\widetilde{u}_{ij}^m}{\widetilde{u}_{ij}^m} \in C^1(\mathfrak{U}, \Omega_{\widehat{\mathfrak{P}}^m/S}^1)$$

et :

$$h_{ijk}^m = \widetilde{u}_{ij}^m \cdot (\widetilde{u}_{ik}^m)^{-1} \cdot \widetilde{u}_{jk}^m \in C^2(\mathfrak{U}, 1 + \mathcal{I}^m).$$

Ils définissent donc un élément de $C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^\times)$. Des calculs similaires à ceux de la section 2 montrent que si on modifie les relèvements choisis ou le choix du cocycle, on modifie cette classe d'un cobord. On obtient donc bien une application dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^\times[2].$$

On inverse alors, après tensorisation par \mathbb{Q} , le morphisme $\mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^\times \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^\times(1) \otimes \mathbb{Q}$ en considérant le morphisme qui est défini en degré m par la division par p^m . On obtient donc le cocycle :

$$\left(\frac{d\tilde{u}_{ij}^m}{\tilde{u}_{ij}^m} \otimes \frac{1}{p^m}, \tilde{u}_{ij}^m \cdot (\tilde{u}_{ik}^m)^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}^m \otimes \frac{1}{p^m} \right) \in C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{K}_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^\times(1) \otimes \mathbb{Q}).$$

On conclut alors notre calcul en utilisant l'application égale en degré m à la multiplication par p^m sur la première composante et $p^m \log$ sur la deuxième. Ce qui nous donne :

$$\left(\frac{d\tilde{u}_{ij}^m}{\tilde{u}_{ij}^m} \otimes 1, \log(\tilde{u}_{ij}^m \cdot (\tilde{u}_{ik}^m)^{-1} \cdot \tilde{u}_{jk}^m)^{p^m} \otimes \frac{1}{p^m} \right) \in C^2(\mathfrak{U}, \Omega_{\hat{\mathfrak{p}}^\bullet/S}^*)_{\mathbb{Q}}.$$

Ce cocycle correspond, par le morphisme du théorème 3.4.1, à celui qui a été construit à la section 2. \square

Corollaire 3.6.5. *Soit X une k -variété propre, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & & H^2((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) \otimes \mathbb{Q} \\ & \nearrow c_{1,\text{cris}} & \uparrow \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & & \\ & \searrow c_{1,\text{rig}} & \\ & & H_{\text{rig}}^2(X/K) \end{array}$$

où la flèche $c_{1,\text{cris}}$ est la première classe de Chern cristalline de [10] et la flèche verticale est celle qui est donnée par

$$H_{\text{rig}}^2(X/K) \rightarrow H_{\text{cris}\bullet}^2(X) \rightarrow H^2((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) \otimes \mathbb{Q}.$$

DÉMONSTRATION : Grâce à la proposition, il suffit de comparer c_1^\bullet avec $c_{1,\text{cris}}$. Or cette dernière s'obtient à partir de la première en appliquant le foncteur p_0^* . \square

Corollaire 3.6.6. *On a*

$$c_{i,\text{rig}}(\mathcal{E}) = c_{i,\text{conv}}(\mathcal{E})$$

via l'isomorphisme de [20, 0.6.7]

$$H_{\text{rig}}^{2i}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^{2i}((X/S)_{\text{conv}}, \mathcal{K}_{X/S})$$

où $c_{i,\text{conv}}$ sont les classes de Chern définies dans [19, A].

DÉMONSTRATION : En notant $T = (X, \mathcal{Y}, Id_X)$ on a les isomorphismes :

$$\mathbb{R} \varprojlim_m (\mathbb{R}u_{X/S*}^\bullet(\mathcal{O}_{X/S}^\bullet) \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}sp_*\Omega_{X[}^* \xrightarrow{\sim} (\mathcal{K}_{X/S})_T.$$

Dès lors la construction du $c_{1,conv}$ de [19, A] est la même que celle du $c_{1,\bullet}$ ci dessus. Les décompositions de $H_{rig}^*(\mathbb{P}_X/K)$ comme $H_{rig}^*(X/K)$ -module et $H^*((\mathbb{P}_X/S)_{conv}, \mathcal{K}_{\mathbb{P}_X/S})$ comme $H^*((X/S)_{conv}, \mathcal{K}_{X/S})$ -module étant compatibles, notre comparaison se prolonge aux c_i . □

4. CAS DES VARIÉTÉS OUVERTES

Nous allons nous intéresser au cas général.

4.1. Méthode générale - Les théorèmes de prolongements. Nous allons construire la première classe de Chern d'un faisceau inversible en montrant qu'il existe une compactification de X sur laquelle on peut prolonger ce faisceau en un faisceau inversible. On pourra alors conclure en montrant que la classe obtenue, en revenant, par fonctorialité, dans la cohomologie rigide de X , ne dépend pas des choix faits.

L'ingrédient principal pour montrer l'existence de ces prolongements de faisceaux est le théorème de platification par éclatement de Raynaud-Gruson [24]. Nous allons avoir besoin de terminologie. Soient X une k -variété, Y une sous-variété fermée et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Si on note $\pi : X' \rightarrow X$ l'éclaté de Y dans X , on appellera transformé strict de \mathcal{F} , et on notera $TS(\mathcal{F})$, le quotient de $\pi^*(\mathcal{F})$ par le sous-faisceau engendré par les sections à support dans $\pi^{-1}(Y)$. Il est direct de montrer que le transformé strict d'un faisceau cohérent (resp. localement libre) est cohérent (resp. localement libre).

Passons à la démonstration des lemmes.

Lemme 4.1.1. *Soit X une k -variété, il existe une k -variété propre \overline{X} et une immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ telles que $Z = \overline{X} - X$ soit un diviseur.*

DÉMONSTRATION : D'après Nagata [18], il existe une k -variété propre \overline{X}_1 et une immersion ouverte $j_1 : X \hookrightarrow \overline{X}_1$. Si on note $Z_1 = \overline{X}_1 - X$, on considère l'éclatement \overline{X} de \overline{X}_1 le long de Z_1 . C'est encore une k -variété propre. De plus, l'éclatement ne modifiant pas $\overline{X}_1 - Z_1$, j_1 se prolonge en une immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ et $Z = \overline{X} - X$ est un diviseur. □

REMARQUE : Par la suite nous noterons (\overline{X}, j) la donnée consistant en la variété propre \overline{X} et l'immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \overline{X}$. Nous supposerons toujours, sauf mention explicite que nos compactifications vérifient la condition du lemme 4.1.1.

Théorème 4.1.2. *Soient X une k -variété et \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r sur X . Il existe une compactification de X , $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ un faisceau localement libre de rang r sur \overline{X} tel que :*

$$j^*(\overline{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}.$$

DÉMONSTRATION : On se donne une compactification (\overline{X}_1, j_1) de X . D'après [1, 6.9.8], on sait qu'il existe \mathcal{E}_1 un sous-faisceau cohérent de $j_{1*}(\mathcal{E})$ tel que $j_1^*(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}$. On sait alors par le théorème de platification par éclatement de Raynaud-Gruson [24, 5.2.2] qu'il existe un éclatement $\pi : \overline{X} \rightarrow \overline{X}_1$ centré hors de X tel que le transformé strict $\overline{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E}_1 soit plat.

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{X} \\ & \nearrow j & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{j_1} & \overline{X}_1. \end{array}$$

Or $\overline{\mathcal{E}}$ est cohérent car c'est le transformé strict d'un faisceau cohérent, il est donc localement libre. L'éclatement ayant lieu en dehors de X , (\overline{X}, j) est encore une compactification de X et $j^*\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. Le faisceau $\overline{\mathcal{E}}$ est de rang r . \square

REMARQUE : si $r = 1$ i.e, si \mathcal{E} est un faisceau inversible, on peut démontrer cette propriété de manière élémentaire. Comme précédemment, on choisit une compactification (\overline{X}_1, j_1) de X et \mathcal{E}_1 un sous-faisceau cohérent de $j_{1*}(\mathcal{E})$ tel que $j_1^*(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}$. Dès lors on regarde les fibrés projectifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(\mathcal{E}_1) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{j_1} & \overline{X}_1 \end{array}$$

On a alors $j^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_1)}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$.

Théorème 4.1.3. *Soient X, X' deux k -variétés et un morphisme $f : X' \rightarrow X$. Il existe des compactifications (\overline{X}, j) et (\overline{X}', j') de X et X' respectivement, telles qu'on puisse trouver un morphisme propre $\overline{f} : \overline{X}' \rightarrow \overline{X}$ de sorte que l'on ait le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' \\ f \downarrow & & \downarrow \overline{f} \\ X & \xrightarrow{j} & \overline{X}. \end{array}$$

De plus, si on se donne un faisceau \mathcal{E} localement libre de rang r sur X , on peut choisir ces compactifications de sorte qu'il existe un faisceau localement libre $\overline{\mathcal{E}}$ sur \overline{X} tel que :

$$j^*(\overline{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}.$$

On a alors :

$$(j')^*(\overline{f}^*\overline{\mathcal{E}}) = f^*\mathcal{E}.$$

DÉMONSTRATION : On se donne des compactifications (\overline{X}, j) et (\overline{X}', j') de X et X' respectivement. On regarde alors \overline{X}'_2 l'adhérence schématique de X' dans $\overline{X} \times \overline{X}'_1$. On note alors \overline{X}' la variété obtenue en éclatant le complémentaire de X' dans \overline{X}'_2 . L'éclatement

ayant lieu en dehors de X' l'immersion de X' dans \overline{X}'_2 se relève en une immersion de X' dans \overline{X}' . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overline{X}' & & \\
 & \nearrow j' & \downarrow \pi & & \\
 X' & \hookrightarrow & \overline{X}'_2 & \searrow & \\
 \downarrow f & & \downarrow \overline{f}_2 & & \downarrow pr \\
 X & \hookrightarrow & \overline{X} & & \overline{X} \times \overline{X}'_1
 \end{array}$$

La flèche $\overline{f} = \pi \circ \overline{f}_2$ est donc propre comme composition de morphismes propres. De plus, si on se donne sur X un faisceau localement libre \mathcal{E} , on peut grâce au théorème 4.1.2 choisir la compactification (\overline{X}, j) pour qu'il existe sur \overline{X} un faisceau localement libre $\overline{\mathcal{E}}$ vérifiant $j^* \overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. La dernière propriété est formelle. \square

Théorème 4.1.4. *Soient X une k -variété*

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0,$$

une suite exacte de faisceaux localement libres sur X . Il existe $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification de X et une suite exacte de faisceaux localement libres

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}' \rightarrow \overline{\mathcal{E}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}'' \rightarrow 0$$

sur \overline{X} , telles que la restriction à X de cette dernière soit la suite exacte dont on est parti..

DÉMONSTRATION : On choisit une compactification (\overline{X}_1, j_1) de X . Il existe alors un sous-faisceau de $j_{1*}(\mathcal{E})$ qui soit cohérent et dont la restriction à X soit \mathcal{E} . Nommons un tel faisceau $\overline{\mathcal{E}}_1$. On regarde alors la flèche composée :

$$\varphi : \overline{\mathcal{E}}_1 \rightarrow j_{1*}(\mathcal{E}) \rightarrow j_{1*}(\mathcal{E}'').$$

On pose :

$$\overline{\mathcal{E}}_1' := \text{Ker } \varphi \text{ et } \overline{\mathcal{E}}_1'' := \overline{\mathcal{E}}_1 / \overline{\mathcal{E}}_1'.$$

On obtient donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_1' \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_1 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_1'' \rightarrow 0$$

où $\overline{\mathcal{E}}_1'$, $\overline{\mathcal{E}}_1$ et $\overline{\mathcal{E}}_1''$ sont trois faisceaux cohérents dont les restrictions à X sont respectivement \mathcal{E}' , \mathcal{E} et \mathcal{E}'' .

Comme ci-dessus, il existe un éclatement $p_1 : \overline{X}_2 \rightarrow \overline{X}_1$ en dehors de X tel que $\overline{\mathcal{E}}_2 = \text{TS}(\overline{\mathcal{E}}_1)$ soit localement libre. En posant :

$$\overline{\mathcal{E}}_2'' := \text{TS}(\overline{\mathcal{E}}_1'') \text{ et } \overline{\mathcal{E}}_2' := \text{Ker}(\overline{\mathcal{E}}_2 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_2'')$$

on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_2' \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_2 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_2'' \rightarrow 0.$$

De plus $\overline{\mathcal{E}}_2'$ et $\overline{\mathcal{E}}_2''$ sont cohérents, $\overline{\mathcal{E}}_2$ est localement libre et la restriction de ces trois faisceaux à X est la bonne. On considère alors un éclatement $p_2 : \overline{X} \rightarrow \overline{X}_2$ en dehors de X (vu comme ouvert de \overline{X}_2) tel que $\overline{\mathcal{E}}'' = \text{TS}(\overline{\mathcal{E}}_2'')$ soit localement libre. On procède comme précédemment en posant :

$$\overline{\mathcal{E}} = p_2^*(\overline{\mathcal{E}}_2) \text{ et } \overline{\mathcal{E}}' := \text{Ker}(\overline{\mathcal{E}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}').$$

On obtient alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{E}}' \rightarrow \overline{\mathcal{E}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}'' \rightarrow 0$$

où les deux faisceaux de droite sont localement libres par construction (le transformé strict d'un faisceau localement libre est localement libre) et celui de gauche comme noyau d'une application surjective entre faisceaux localement libres. Les restrictions à X sont toujours les bonnes. \square

4.2. La première classe. Grâce au théorème 4.1.2 on va définir la première classe de Chern d'un faisceau inversible \mathcal{F} comme l'image par le morphisme de fonctorialité de la première classe de Chern d'un prolongement de \mathcal{F} sur une compactification. Pour cela, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soient X une variété sur k et \mathcal{F} un faisceau inversible sur X . Pour $l \in \{1, 2\}$ on se donne (\overline{X}_l, j_l) une compactification de X et $\overline{\mathcal{F}}_l$ un faisceau inversible prolongeant \mathcal{F} . On a alors :*

$$j_{1rig}^*(c_1(\overline{\mathcal{F}}_1)) = j_{2rig}^*(c_1(\overline{\mathcal{F}}_2)).$$

DÉMONSTRATION :

Nous allons d'abord nous ramener à deux prolongements de notre faisceau sur la même variété. Nous utiliserons pour cela la méthode habituelle du plongement diagonal. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \overline{X}_1 & & \\ & \nearrow j_1 & & \nwarrow p_1 & \\ X & & & & \overline{X}_1 \times \overline{X}_2 \xleftarrow{\pi} \overline{X}_3 \\ & \searrow j_2 & & \swarrow p_2 & \\ & & \overline{X}_2 & & \end{array}$$

$\xrightarrow{\alpha}$

où π est l'éclatement de l'adhérence schématique de X dans $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ en le complémentaire de X . Les fonctorialités des classes de Chern dans le cas propre nous ramènent à montrer

notre théorème pour $(p_1 \circ \pi)^*(\overline{\mathcal{F}}_1)$ et $(p_2 \circ \pi)^*(\overline{\mathcal{F}}_2)$, tous deux faisceaux inversible sur \overline{X}_3 . En effet si on note encore α l'inclusion de X dans \overline{X}_3 on a pour tout $l \in \{1, 2\}$:

$$(4.A) \quad j_{l,rig}^*(c_1(\overline{\mathcal{F}}_l)) = \alpha^*(p_l \circ \pi)^*(c_1(\overline{\mathcal{F}}_l))$$

$$(4.B) \quad = \alpha^*c_1((p_l \circ \pi)^*\overline{\mathcal{F}}_l).$$

De plus, grace à la multiplicativité de la première classe de Chern, on peut supposer de plus que $\overline{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{O}_{\overline{X}}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.

On suppose donc donnée une compactification (\overline{X}, j) et un faisceau inversible $\overline{\mathcal{F}}$ tel que

$$j^*\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X,$$

et on va montrer que $j_{rig}^*c_1(\overline{\mathcal{F}}) = 0$.

Nous allons utiliser un plongement et des calculs à la Cech pour faire la preuve. Comme à la section 2, on se donne une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ dans un C -schéma formel lisse au voisinage de \overline{X} . On considère sa fibre générique rigide Y . On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xhookrightarrow{\quad} & \overline{X} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longleftarrow & Y \\ & \searrow & \swarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Spec}(k) & \longrightarrow & \text{Spf}(C) & \longleftarrow & \text{Spm}(K). \end{array}$$

En appliquant le lemme 2.2.1.1 on sait qu'il existe un recouvrement affine fini \mathcal{U} de \mathcal{Y} tel que le recouvrement induit $\mathcal{U}_{\overline{X}}$ sur \overline{X} trivialisent $\overline{\mathcal{F}}$. On pose alors $\mathcal{U}_i = \text{Spf}(\mathcal{A}_i)$ et $\overline{X}_i = \overline{X} \cap \mathcal{U}_i = \text{Spec}(A_i)$ avec $A_i = \mathcal{A}_i/I_i$. On pose $X_i = \overline{X}_i \cap X$ et \mathcal{U}_X le recouvrement de X par ces ouverts. Quitte à prendre un recouvrement plus fin, on peut supposer qu'il existe $\overline{f}_i \in A_i$ tel que X_i soit l'ouvert $D(\overline{f}_i)$ de \overline{X}_i . Pour tout i , on choisit alors $f_i \in \mathcal{A}_i$ un relèvement de \overline{f}_i .

REMARQUE : on notera avec un multi-indice $\underline{i} = (i_0, \dots, i_n)$ les mêmes choses définies par rapport à l'ouvert $\mathcal{U}_{\underline{i}} = \mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_n}$.

Pour tout multi-indice $\underline{i} = (i_0, \dots, i_n)$, $X_{\underline{i}}$ est l'ouvert $D(\overline{f}_{i_0} \cdots \overline{f}_{i_n})$ de $\overline{X}_{\underline{i}}$. On pose donc :

$$\overline{f}_{\underline{i}} = \overline{f}_{i_0} \cdots \overline{f}_{i_n}.$$

On prend alors comme relèvement de $\overline{f}_{\underline{i}}$ dans $\mathcal{A}_{\underline{i}}$ l'élément :

$$f_{\underline{i}} := f_{i_0} \cdots f_{i_n}$$

où f_{i_k} est vu comme élément de $\mathcal{A}_{\underline{i}}$ via la flèche canonique $\mathcal{A}_{i_k} \rightarrow \mathcal{A}_{\underline{i}}$.

On choisit alors u un cocycle représentant la classe de $\overline{\mathcal{F}}$ dans $H^1(\mathcal{U}_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^*)$.

Proposition 4.2.2. *Avec les notations précédentes et en notant $c_1(u)$ l'image de $c_1(u)$ par l'application $C^2(\mathcal{U}_K, \Omega_{\overline{X}}^*) \rightarrow C^2(\mathcal{U}_K, j^\dagger \Omega_{\overline{X}}^*)$, il existe $\zeta \in C^1(\mathcal{U}_K, j^\dagger \Omega_{\overline{X}}^*)$ tel que l'on ait l'égalité*

$$c_1(u) = \Delta(\zeta).$$

On sait que ce cocycle représente un faisceau se restreignant à \mathcal{O}_X sur X . Il existe donc $\theta \in C^0(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$ tel que :

$$u = \delta(\theta)$$

où u désigne par abus de notation l'image dans $C^1(\mathfrak{U}_X, \mathcal{O}_X^*)$ du cocycle u . Pour tout i , θ_i est un élément inversible de $(A_i)_{\overline{f}_i}$, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout i il existe $\alpha_i \in A_i$ et $\beta_i \in A_i$ tels que l'on ait dans $A_i \overline{f}_i$:

$$\frac{\alpha_i}{\overline{f}_i^k} = \theta_i \text{ et } \frac{\beta_i}{\overline{f}_i^k} = \theta_i^{-1}.$$

Quitte à augmenter k et à modifier α_i et β_i , on peut supposer que

$$\alpha_i \cdot \beta_i = \overline{f}_i^{2k}.$$

De même, par définition de θ , on sait que pour tout $i, j \in I$ on a dans $(A_{ij})_{\overline{f}_{ij}}$:

$$\theta_i u_{ij} = \theta_j.$$

Quitte à augmenter de nouveau k , on obtient, dans A_{ij} , en multipliant par \overline{f}_{ij}^k :

$$(4.C) \quad \overline{f}_j^k \alpha_i u_{ij} = \alpha_j \overline{f}_i^k.$$

On choisit des relèvements $\tilde{\alpha}_i$ (resp. $\tilde{\beta}_i$) de α_i (resp. β_i) dans \mathcal{A}_i . On introduit alors pour tout $0 < \lambda < 1$ les voisinages stricts de $]X_i[$ dans $]\overline{X}_i[$:

$$V_\lambda^i = \{x \in]\overline{X}_i[\mid |f_i(x)| \geq \lambda\}$$

où on considère f_i comme une fonction analytique sur $]\overline{X}_i[$. Sur ces ouverts, la fonction f_i est inversible, on peut donc considérer les fonctions :

$$\tilde{\theta}_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\overline{f}_i^k}.$$

Lemme 4.2.3. *Avec les notations précédentes, il existe un voisinage strict de $]X_i[$ dans $]\overline{X}_i[$ sur lequel $\tilde{\theta}_i$ est inversible.*

DÉMONSTRATION : La réduction modulo I_i de $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i \in \mathcal{A}_i$ est \overline{f}_i^{2k} . Il existe donc $c_i \in I_i$ tel que :

$$\tilde{\alpha}_i \cdot \tilde{\beta}_i = \overline{f}_i^{2k} + c_i.$$

On utilise alors les voisinages standards. On considère une suite d'éléments strictement positifs (λ_n) tendant inférieurement vers 1 et une suite (η_n) tendant inférieurement vers 1 telle que pour tout n on ait :

$$\frac{\eta_n}{\lambda_n^{2k}} < 1.$$

On se donne $(g_{i,r})_r$ un système de générateurs de l'idéal I_i . On pose alors :

$$V_n^i = \{x \in]\overline{X}_i[\mid |f_i(x)| \geq \lambda_n, \forall r |g_{i,r}(x)| \leq \eta_n\}.$$

On note $V_{\underline{\lambda}, \underline{\eta}}^i = \cup_n V_n^i$. C'est un voisinage strict de $]X_i[$ dans $]\overline{X}_i[$ [6, 1.2.4].

Pour tout x dans cet ouvert on a par définition :

$$\left| \frac{c_i}{f_i^{2k}}(x) \right| < 1.$$

Donc pour tout $x \in V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^i$ la série :

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{c_i}{f_i^{2k}}(x) \right)^l$$

converge. Nous la noterons $(1 + c_i/f_i^{2k})^{-1}$. La fonction définie sur $V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^i$:

$$\tilde{\theta}_i^{-1} = \frac{\tilde{\beta}_i}{f_i^k} \cdot \left(1 + \frac{c_i}{f_i^{2k}} \right)^{-1}$$

est donc l'inverse de $\tilde{\theta}_i$. □

On pose alors :

$$(4.D) \quad \zeta_i = \frac{d\tilde{\theta}_i}{\tilde{\theta}_i} \in C^0(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \Omega_{[\overline{X}]}^1).$$

En relevant l'équation 4.C dans \mathcal{A}_{ij} , on trouve qu'il existe $b_{ij} \in I_{ij}$ tel que :

$$f_j^k \tilde{\alpha}_i \tilde{u}_{ij} = \tilde{\alpha}_j f_i^k + b_{ij}$$

où \tilde{u}_{ij} est un relèvement de u_{ij} servant à calculer la classe de Chern. On définit alors les ouverts

$$V_n^{ij} = \{x \in]\overline{X}_{ij}[\mid |f_{ij}(x)| \geq \lambda_n, \forall r |g_{ij,r}(x)| \leq \eta_n\},$$

où les $g_{ij,r}$ sont des générateurs de I_{ij} . On considère, comme précédemment $V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^{ij} = \cup_n V_n^{ij}$.

C'est un voisinage strict de $]X_{ij}[$ dans $]\overline{X}_{ij}[$. En voyant tous ces termes comme des fonctions sur $]\overline{X}_{ij}[$ puis en se restreignant aux voisinages stricts $V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^{ij}$, on vient de voir que $\tilde{\theta}_j$ était inversible. On obtient alors :

$$(4.E) \quad \tilde{\theta}_i \tilde{u}_{ij} = \tilde{\theta}_j \left(1 + \frac{b_{ij}}{f_{ij}^k} \tilde{\theta}_j^{-1} \right).$$

De même, pour tout $x \in V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^{ij}$,

$$|\tilde{\theta}_j^{-1}(x)| \leq \frac{1}{|f_j^k(x)|} \leq \frac{1}{\lambda_n^k}$$

car $|f_i(x)|$ étant inférieure à 1, on a

$$|f_i(x)| |f_j(x)| \geq \lambda_n \Rightarrow |f_j(x)| \leq \lambda_n.$$

Donc pour tout $x \in V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^{ij}$ on a :

$$\left| \frac{b_{ij}}{f_{ij}^k} \tilde{\theta}_j^{-1}(x) \right| < 1.$$

Sur l'ouvert $V_{\underline{\Delta}, \underline{\eta}}^{ij}$ on peut donc définir la fonction :

$$\zeta_{ij} := -\log \left(1 + \frac{b_{ij}}{f_{ij}^k} \tilde{\theta}_j^{-1} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(-\frac{b_{ij}}{f_{ij}^k} \tilde{\theta}_j^{-1} \right)^l.$$

On définit ainsi :

$$(4.F) \quad \zeta_{ij} \in C^1(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \mathcal{O}_{|\overline{X}|}).$$

En regroupant 4.D et 4.F, on obtient :

$$\zeta \in C^1(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \Omega_{|\overline{X}|}^*) = C^1(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \mathcal{O}_{|\overline{X}|}) \oplus C^0(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \Omega_{|\overline{X}|}^1).$$

Un calcul similaire à celui de 2.1.3, qui se mène en utilisant l'égalité 4.E, montre que ce ζ vérifie bien

$$c_1(u) = \Delta(\zeta).$$

□

Avec les notations précédentes, $c_1(u)$ est envoyé sur zéro par l'application :

$$H^2(\mathfrak{U}_K, \Omega_{|\overline{X}|}^*) \rightarrow H^2(\mathfrak{U}_K, j^\dagger \Omega_{|\overline{X}|}^*).$$

On a donc :

$$j_{rig}^*(c_1(\overline{\mathcal{F}})) = 0.$$

□

On peut donc maintenant définir la première classe de Chern d'un faisceau inversible.

Définition 4.2.4. *Avec les notations précédentes, on pose*

$$c_1(\mathcal{F}) := j^* c_1(\overline{\mathcal{F}})$$

où (\overline{X}, j) est une compactification vérifiant la condition du lemme 4.1.1 et $\overline{\mathcal{F}}$ un faisceau inversible sur \overline{X} tel que $j^* \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Proposition 4.2.5 (Fonctorialité). *Soient X et X' deux k -variétés et un morphisme $f : X' \rightarrow X$. Pour tout faisceau inversible \mathcal{F} sur X on a :*

$$f^* c_1(\mathcal{F}) = c_1(f^* \mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION : Grâce au théorème 4.1.3, on sait qu'il existe des compactifications (\overline{X}, j) et (\overline{X}', j') de X et X' respectivement telles que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' \\ f \downarrow & & \downarrow \overline{f} \\ X & \xrightarrow{j} & \overline{X}. \end{array}$$

De plus, on peut les choisir telles qu'il existe un faisceau inversible $\overline{\mathcal{F}}$ sur \overline{X} vérifiant $j^*\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f^*c_1^X(\mathcal{F}) &= f^*j^*c_1^{\overline{X}}(\overline{\mathcal{F}}) \\ &= j'^*f^*c_1^{\overline{X}}(\overline{\mathcal{F}}) \\ &= j'^*c_1^{\overline{X}'}(f^*\overline{\mathcal{F}}) \\ &= c_1^{X'}(f^*\mathcal{F}), \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que l'on a :

$$j'^*(f^*\overline{\mathcal{F}}) = f^*\mathcal{F}.$$

□

Proposition 4.2.6 (Multiplicativité). *Soient X une k -variété et \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux faisceaux inversibles sur X , on a :*

$$c_1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') = c_1(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}').$$

DÉMONSTRATION : Cela découle directement de la multiplicativité de la classe de Chern dans le cas propre 2.1.5. □

4.3. Cohomologie de l'espace projectif. On se pose maintenant la question du calcul de la cohomologie rigide d'un fibré projectif sur une base quelconque. Soient X une k -variété et \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r sur X . On sait grâce au théorème 4.1.2 qu'il existe une compactification (\overline{X}, j) de X , ainsi qu'un faisceau localement libre $\overline{\mathcal{E}}$ sur \overline{X} de rang r tel que :

$$j^*\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}.$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{j_P} & \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{j} & \overline{X} \end{array}$$

A partir de là, on note \mathbb{P} pour $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et $\overline{\mathbb{P}}$ pour $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$. On note aussi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ et $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}}(1)$ les deux faisceaux canoniques. Si on regarde alors $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ et $c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}}(1))$ comme des applications dans la catégorie dérivée $D^+(\overline{X}_{zar})$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\overline{\mathbb{P}}/K)[2] \\ & \nearrow c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}}(1)) & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{\overline{X}} & & \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\mathbb{P}/K)[2] \\ & \searrow c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) & \end{array}$$

De même, on a les morphismes de fonctorialité suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma_{rig}(\overline{X}/K) & \longrightarrow & \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\overline{\mathbb{P}}/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\Gamma_{rig}(X/K) & \longrightarrow & \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\mathbb{P}/K) \end{array}$$

On en déduit alors, par cup-produit, comme dans le cas classique

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}}(1))^i : & \mathbb{R}\Gamma_{rig}(\overline{X}/K)[-2i] & \longrightarrow \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\overline{\mathbb{P}}/K) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^i : & \mathbb{R}\Gamma_{rig}(X/K)[-2i] & \longrightarrow \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{rig}(\mathbb{P}/K) \end{array}$$

Théorème 4.3.1. *Avec les notations précédentes, les applications :*

$$\bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}}(1))^i \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^i,$$

sont des isomorphismes.

DÉMONSTRATION : Le cas des variétés propres a déjà été traité dans 2.2.1.

Sinon, l'énoncé étant local sur la base, on peut supposer que \mathcal{E} est localement libre. Il suffit alors de remarquer que si on se donne une famille cofinale de voisinages stricts de $]X[$ dans $]\overline{X}[$, disons $(V_i)_{i \in I}$, la famille des $\mathbb{P}_{V_i}^r$ est une famille cofinale de voisinages stricts de $\mathbb{P}_{]X[}^r$ dans $\mathbb{P}_{]\overline{X}[}^r$. On utilise alors que le morphisme $p_i : \mathbb{P}_{V_i}^r \rightarrow V_i$ est quasi-compact et quasi-séparé et commute donc avec les limites inductives filtrantes [6, 0.1.8]. On est donc ramené au cas traité dans 2.2.2. \square

Corollaire 4.3.2. *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout n la décomposition suivante :*

$$H_{rig}^n(\mathbb{P}/K) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H_{rig}^{n-2i}(X/K) \cdot \xi^i.$$

4.4. **Construction des c_i .** On définit les classes de Chern supérieures comme dans le cas classique. On applique la décomposition du corollaire 4.3.2 à ξ^r et on obtient :

$$(4.G) \quad \xi^r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} c_i(\mathcal{E}) \xi^{r-i},$$

avec

$$c_i(\mathcal{E}) \in H_{rig}^{2i}(X/K).$$

Définition 4.4.1. *Avec les notations précédentes, pour $0 < i \leq r$ on appelle i -ème classe de Chern de \mathcal{E} la classe $c_i(\mathcal{E})$. On pose de plus*

$$c_0(\mathcal{E}) = 1 \text{ dans } H_{rig}^0(X/K).$$

REMARQUE : En appliquant ce que l'on vient de voir à un fibré inversible \mathcal{F} , on retrouve notre première classe de Chern. En effet la décomposition 4.G devient alors :

$$c_{1,rig}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = p^*c_1(\mathcal{F}).$$

Or la fonctorialité de $c_{1,rig}$ nous donne

$$c_{1,rig}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = p^*c_{1,rig}(\mathcal{F}).$$

On conclut en utilisant que p^* est injectif.

Proposition 4.4.2 (Fonctorialité). *Soient X et X' deux variétés propres sur k et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme. Pour tout \mathcal{E} faisceau localement libre de rang r sur X et tout i , on a*

$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E}).$$

DÉMONSTRATION : On note $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(f^*(\mathcal{E}))$ et $\xi' = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))$. La fonctorialité de la première classe de Chern nous assure que

$$\xi' = f^*\xi.$$

En appliquant alors f^* à la décomposition 4.G, on obtient dans $H_{rig}^{2r}(\mathbb{P}'/K)$:

$$\xi'^r = \sum_{i=1}^r (-1)^i f^*c_i(\mathcal{E})\xi'^{r-i}.$$

La décomposition étant unique on a :

$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E}).$$

4.5. Additivité des classes de Chern.

Théorème 4.5.1. *Les classes de Chern définies précédemment sont additives.*

DÉMONSTRATION : Soient X une variété et une suite exacte de faisceaux localement libres

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0.$$

On sait grâce au théorème 4.1.4 qu'il existe une compactification de X , $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ et une suite exacte de faisceaux localement libres sur \overline{X}

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{E}'} \rightarrow \overline{\mathcal{E}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}''} \rightarrow 0$$

telles que la restriction à X de $\overline{\mathcal{E}}$ (resp. $\overline{\mathcal{E}'}$, $\overline{\mathcal{E}''}$) soit \mathcal{E} (resp. \mathcal{E}' , \mathcal{E}''). Dès lors on a pour tout i

$$\begin{aligned} c_i(\mathcal{E}) &= j^*c_i(\overline{\mathcal{E}}) \\ &= j^*\left(\sum_{j=0}^i c_i(\overline{\mathcal{E}'})c_{i-j}(\overline{\mathcal{E}''})\right) \\ &= \sum_{j=0}^i c_i(\mathcal{E}')c_{i-j}(\mathcal{E}''). \end{aligned}$$

□

4.6. Action du Frobenius. Soit X une k -variété. On note F le frobenius absolu sur X . Il induit sur les groupes de cohomologie rigide un frobenius :

$$\Phi : H_{rig}^i(X/K) \rightarrow H_{rig}^i(X/K).$$

On a alors

Proposition 4.6.1. *Soit \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r sur X , pour tout $i \leq r$, on a :*

$$\Phi(c_i(\mathcal{E})) = p^i c_i(\mathcal{E}).$$

DÉMONSTRATION : Par la fonctorialité des classes de Chern, notre proposition se ramène à

$$c_i(F^* \mathcal{E}) = p^i c_i(\mathcal{E}).$$

De plus, de par la définition des classes de Chern, il suffit de regarder le cas du c_1 d'un faisceau inversible. Or dans ce cas, on a $F^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\otimes p}$. Notre proposition découle alors de la multiplicativité des classes de Chern. \square

RÉFÉRENCES

- [1] A. Grothendieck and J.A. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique I*, volume 166 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1971.
- [2] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Number 269-270-305 in *Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972-1973.
- [3] P. Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* . Number 407 in *Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1974.
- [4] P. Berthelot. Géométrie rigide et cohomologie rigide des variétés algébriques de caractéristique p . *Mémoire de la Soc. Math. France*, 23 :7–32, 1986.
- [5] P. Berthelot. Lettre de Berthelot à Illusie, 1990.
- [6] P. Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. *Prépublications IRMAR*, 1996.
- [7] P. Berthelot. \mathcal{D} -modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 29 :185–272, 1996.
- [8] P. Berthelot. Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide. *Notes aux C.R.A.S.Paris*, 325 :493–498, 1997.
- [9] P. Berthelot. Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide. *Inventiones Mathematicae*, 128 :329–377, 1997.
- [10] P. Berthelot and L. Illusie. Classes de Chern en cohomologie cristalline. *Notes aux C.R.A.S.Paris*, 270, 1970.
- [11] P. Berthelot and A. Ogus. F-isocrystals and De Rham cohomology I. *Inventiones Mathematicae*, 72 :159–199, 1983.
- [12] H. Gillet. Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory. *Advances in mathematics*, 40 :203–289, 1981.
- [13] A. Grothendieck. La théorie des classes de Chern. *Bull. Soc. Math. France*, 86 :137–154, 1958.
- [14] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformations II*. Number 283 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972.

- [15] R. Kiehl. Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Inventiones Mathematicae*, 2 :256–273, 1967.
- [16] W. Lütkebohmert. Formal-algebraic and rigid-analytic geometry. *Mathematische Annalen*, 286 :341–371, 1990.
- [17] P. Monsky and G. Washnitzer. Formal cohomology I. *Annals of Maths*, 88 :218–238, 1968.
- [18] M. Nagata. Embedding of an abstract variety in a complete variety. *J. Math Kyoto Univ.*, 2 :1–10, 1962.
- [19] W. Niziol. On the image of p -adic regulators. *Inventiones Mathematicae*, 127 :375–400, 1997.
- [20] A. Ogus. The convergent topos in characteristic p . In *The Grothendieck festschrift*, pages 133–162. North-Holland, 1968.
- [21] D. Petrequin. Classes de cycle en cohomologie rigide. Prépublication IRMAR 01-06, Université de Rennes I (2001) : soumis pour publication.
- [22] D. Petrequin. Classes de Chern et classes de cycle en cohomologie rigide. Thèse de l'Université de Rennes I, 2000.
- [23] M. Raynaud. Géométrie analytique rigide, d'après Tate, Kiehl, ... *Bulletin de la Soc. Math. France, Memoire*, 39/40 :319–327, 1974.
- [24] M. Raynaud and L. Gruson. Critères de platitude et de projectivité. *Inventiones Mathematicae*, 13 :1–89, 1971.
- [25] J.P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 6 :1–42, 1956.
- [26] F. Trihan. Théorie de Dieudonné cristalline de niveau variable. Thèse de l'Université de Rennes I, 1996.
- [27] J.L. Verdier. Le théorème de Le Potier. *Astérisque*, 17, 1974.